第28卷 第1期
2011年02月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 28 No. 1
Feb. 2011

文章编号:1005-3085(2011)01-0061-06

高维抛物型方程的一个高精度恒稳定的交替方向格式*

张 星[1]， 单双荣[2]

(1- 福建生物工程职业技术学院基础部，福州 350002； 2- 华侨大学数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘 要: 本文对高维抛物型方程构造了一个高精度恒稳定的交替方向格式．当$2\le p\le 4$时，格式的局部截断误差阶可达到$O(\tau^2+h^4)$，当$p=3$时，将Richardson外推法应用于本文格式，得到了$O(\tau^3+h^6)$阶精度的近似解．最后通过数值实例验证了我们对所得格式所作的理论分析是正确的．

关键词: 高维抛物型方程；交替方向格式；高精度；恒稳定

分类号: **AMS**(2000) 35A05; 65M12; 92C37　　**中图分类号**: O241.8　　**文献标识码**: A

1 引言

在研究热传导过程、气体扩散现象和电磁场的传播等问题时，常遇到P维抛物型方程．本文研究如下抛物型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{l=1}^{p}\frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2},\quad 0<x_l<L,\quad l=1,2,\cdots,p,\quad t>0 \tag{1}$$

的第一边值问题．

用差分方法求解上述方程，目前已经有了一些较好的格式[1,2]，但有的是条件稳定，有的是精度不够高．求解高维抛物型问题比较理想的是用交替方向法．它是将高维问题转化为一系列的一维问题，通过一系列的三对角方程组的求解来得到高维问题的数值解，此方法最早是由Peaceman和Rachford提出的[3]．它每一步仅解一个三对角线方程组，且保证格式的绝对稳定性，将显格式的计算简便性与隐格式的绝对稳定性结合起来．但P-R格式仅适用于求解二维抛物型方程，不能将它推广到三维以上的抛物型方程．现有的三维ADI格式大多数精度都较低，例如Douglas-Gunn格式精度为$O(\tau^2+h^2)$．为了提高精度，本文将Douglas-Gunn格式加以改造，使之保持了原有ADI格式的计算简便性与绝对稳定性，同时将局部截断误差阶提高到$O(\tau^2+h^4)$．当$2\le p\le 4$时，本文给出的格式是绝对稳定的．另外，为了进一步提高精度，我们将Richardson外推法应用于所得的格式，得到了具有$O(\tau^3+h^6)$阶精度的近似解．文末的数值例子表明我们所作的理论分析是正确的．

2 差分格式的构造

设τ为时间步长，$\Delta x_l\,(l=1,2,\cdots,p)$分别为$x_l\,(l=1,2,\cdots,p)$方向的空间步长．为简便计，本文取等步长$\Delta x=\frac{L}{M}=h$ (M为正整数)，方程(1)的解函数为$u(x_1,x_2,\cdots,x_p,t)$，记$u(j_1h,j_2h,\cdots,j_ph,n\tau)=u(j_1,j_2,\cdots,j_p,n)$.

收稿日期: 2008-06-18. **作者简介**: 张星 (1982年7月生)，男，硕士. 研究方向：偏微分方程数值解.

***基金项目**: 国务院侨务办公室科研基金资助 (04QZR09).

用如下的ADI格式逼近方程(1)，有

$$\left\{\begin{array}{l}\left[I-r\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12r}\right)\delta_{x_l}^2\right](u^{n+\frac{1}{p}}-u^n)=r\Big(\sum\limits_{l=1}^{p}\delta_{x_l}^2+\frac{1}{6}\sum\limits_{\substack{l,k=1\\l<k}}^{p}\delta_{x_l}^2\delta_{x_k}^2\Big)u^n,\\ \left[I-r\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12r}\right)\delta_{x_s}^2\right](u^{n+\frac{s}{p}}-u^n)=u^{n+\frac{s-1}{p}}-u^n,\quad s=2,3,\cdots,p,\end{array}\right. \tag{2}$$

其中$u^n_{j_1,j_2,\cdots,j_p}$表示在节点$(j_1h,j_2h,\cdots,j_ph,n\tau)$处的网格函数值．为简化记号，在以下的论述中省略空间变量下标，以u^n表示$u^n_{j_1,j_2,\cdots,j_p}$，$\delta_{x_l}^2\ (l=1,2,\cdots,p)$分别为关于$x_l\ (l=1,2,\cdots,p)$的二阶中心差商，$r=\frac{\tau}{h^2}$为网格比．为求得格式(2)的截断误差阶，先消去(2)式中的中间层网格函数值$u^{n+\frac{s}{p}}$，得到如下格式

$$\prod_{l=1}^{p}\Big[I-r\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{12r}\Big)\delta_{x_l}^2\Big](u^{n+1}-u^n)=r\Big(\sum_{l=1}^{p}\delta_{x_l}^2+\frac{1}{6}\sum_{\substack{l,k=1\\l<k}}^{p}\delta_{x_l}^2\delta_{x_k}^2\Big)u^n. \tag{3}$$

格式(2)和格式(3)是等价的，二者具有相同的截断误差阶与稳定性．

将(3)式中各个节点上的u以其在节点$(j_1h,j_2h,\cdots,j_ph,n\tau)$处展开的Taylor级数代入，并注意到方程(1)，可得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{1}{2}\Big(\tau-\frac{1}{6}h^2\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\tau^2}{4}\Big(\sum_{\substack{l,k=1\\l<k}}^{p}\frac{\partial^5 u}{\partial t\partial x_k^2\partial x_l^2}-\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\Big)\\&+\frac{h^4}{144}\Big(\sum_{l=1}^{p}\frac{\partial^5 u}{\partial t\partial x_l^4}+\sum_{\substack{l,k=1\\l<k}}^{p}\frac{\partial^5 u}{\partial t\partial x_k^2\partial x_l^2}\Big)+O(\tau^3+\tau^2h^2+\tau h^4+\tau^6)\\=&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{h^4}{360}\sum_{l=1}^{p}\frac{\partial^6 u}{\partial x_l^6}+\frac{h^4}{72}\Big(\sum_{\substack{l,k=1\\l<k}}^{p}\frac{\partial^6 u}{\partial x_k^4\partial x_l^2}+\sum_{\substack{l,k=1\\l<k}}^{p}\frac{\partial^6 u}{\partial x_k^2\partial x_l^4}\Big)+O(h^6).\end{aligned} \tag{4}$$

于是由上式可知格式(3)或与之等价的(2)的截断误差阶为$O(\tau^2+h^4)$．

3 稳定性分析

根据差分格式稳定性分析的Fourier方法，令

$$u^n_{j_1,j_2,\cdots,j_p}=\rho^n\mathrm{e}^{i(j_1\beta_1+j_2\beta_2+\cdots+j_p\beta_p)h},\quad i=\sqrt{-1}, \tag{5}$$

且记

$$\delta_{x_l}^2u^n_{j_1,j_2,\cdots,j_p}=-4s_{q_l}^2u^n_{j_1,j_2,\cdots,j_p},\quad l=1,2,\cdots,p, \tag{6}$$

其中

$$s_{q_l}=\sin\frac{q_l\pi}{2M}\in[0,1],\quad l=1,2,\cdots,p,\quad q_l=0,1,\cdots,M-1$$

将(5)式代入(3)式，经计算整理，并利用(6)式的关系可得格式(2)传播因子为

$$\rho=\frac{\prod\limits_{l=1}^{p}\left[1+4r\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12r}\right)s_{q_l}^2\right]-4r\sum\limits_{l=1}^{p}s_{q_l}^2+\frac{8}{3}r\sum\limits_{\substack{l,k=1\\l<k}}^{p}s_{q_l}^2s_{q_k}^2}{\prod\limits_{l=1}^{p}\left[1+4r\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12r}\right)s_{q_l}^2\right]}, \tag{7}$$

其中

$$s_{q_l}=\sin\frac{q_l\pi}{2M},\quad s_{q_k}=\sin\frac{q_k\pi}{2M}\in[0,1],\quad l,k=1,2,\cdots,p,\quad q_l,q_k=0,1,\cdots,M-1.$$

要使两层差分格式 (2) 稳定，须满足 Von Neumann 条件 $|\rho|\le 1$，即只须证明

$$0\le\frac{2r\sum\limits_{l=1}^{p}s_{q_l}^2-\frac{4}{3}r\sum\limits_{\substack{l,k=1\\l<k}}^{p}s_{q_l}^2s_{q_k}^2}{\prod\limits_{l=1}^{p}\left[1+4r\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12r}\right)s_{q_l}^2\right]}\le 1,\tag{8}$$

成立就行。

不等式 (8) 的左端只当 $p\le 4$ 时成立 (左端不等式与 r 无关). 实际上，因 (8) 式左端中分母恒为正，故只要分子为正即成立.

当 $p=2$ 时，有

$$2\left(s_{q_1}^2+s_{q_2}^2\right)-\frac{4}{3}s_{q_1}^2s_{q_2}^2\ge 2\left(s_{q_1}^2+s_{q_2}^2\right)-\frac{4}{3}s_{q_1}^2\ge 0.$$

当 $p=3$ 时，有

$$\begin{aligned}&2\left(s_{q_1}^2+s_{q_2}^2+s_{q_3}^2\right)-\frac{4}{3}\left(s_{q_1}^2s_{q_2}^2+s_{q_2}^2s_{q_3}^2+s_{q_3}^2s_{q_1}^2\right)\\ \ge\ &2\left(s_{q_1}^2+s_{q_2}^2+s_{q_3}^2\right)-\frac{4}{3}\left(s_{q_1}^2+s_{q_2}^2+s_{q_3}^2\right)\ge 0.\end{aligned}$$

当 $p=4$ 时，有

$$\begin{aligned}&2\left(s_{q_1}^2+s_{q_2}^2+s_{q_3}^2+s_{q_4}^2\right)-\frac{4}{3}\left(s_{q_1}^2s_{q_2}^2+s_{q_1}^2s_{q_3}^2+s_{q_1}^2s_{q_4}^2+s_{q_2}^2s_{q_3}^2+s_{q_2}^2s_{q_4}^2+s_{q_3}^2s_{q_4}^2\right)\\ \ge\ &\frac{2}{3}\sum_{\substack{i,j=1\\i<j}}^{4}\left(s_{q_i}^2-s_{q_j}^2\right)^2\ge 0.\end{aligned}$$

不等式 (8) 的右端，右端不等式与 r 有关.

当 $p=2$ 时，有

$$\begin{aligned}&1-\frac{1}{3}\left(s_{q_1}^2+s_{q_2}^2\right)+16r^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12r}\right)^2s_{q_1}^2s_{q_2}^2+\frac{4}{3}rs_{q_1}^2s_{q_2}^2\\ =\ &\left(1-\frac{1}{3}s_{q_1}^2\right)\left(1-\frac{1}{3}s_{q_2}^2\right)+4r^2s_{q_1}^2s_{q_2}^2\ge 0.\end{aligned}$$

当 $p=3$ 时，有

$$\begin{aligned}&1-\frac{1}{3}\left(s_{q_1}^2+s_{q_2}^2+s_{q_3}^2\right)+16r^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12r}\right)^2\left(s_{q_1}^2s_{q_2}^2+s_{q_1}^2s_{q_3}^2+s_{q_2}^2s_{q_3}^2\right)\\ &+64r^3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12r}\right)^3s_{q_1}^2s_{q_2}^2s_{q_3}^2+\frac{4}{3}r\left(s_{q_1}^2s_{q_2}^2+s_{q_1}^2s_{q_3}^2+s_{q_2}^2s_{q_3}^2\right)\\ =\ &\left(1-\frac{1}{3}s_{q_1}^2\right)\left(1-\frac{1}{3}s_{q_2}^2\right)\left(1-\frac{1}{3}s_{q_3}^2\right)+4r^2\left(s_{q_1}^2s_{q_2}^2+s_{q_1}^2s_{q_3}^2+s_{q_2}^2s_{q_3}^2-s_{q_1}^2s_{q_2}^2s_{q_3}^2\right)\\ &+\left(8r^3+\frac{2}{3}r\right)s_{q_1}^2s_{q_2}^2s_{q_3}^2\ge 0,\end{aligned}$$

当 $p=4$ 时，有

$$
\begin{aligned}
&1-\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}s_{q_i}^2+16r^2\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{12r}\Big)^2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{4}s_{q_i}^2s_{q_j}^2\\
&+64r^3\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{12r}\Big)^3\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{4}s_{q_i}^2s_{q_j}^2s_{q_k}^2+256r^4\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{12r}\Big)^4\prod_{i=1}^{4}s_{q_i}^2+\frac{4}{3}r\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{4}s_{q_i}^2s_{q_j}^2\\
=&\prod_{i=1}^{4}\Big(1-\frac{1}{3}s_{q_i}^2\Big)+r\Big(\frac{2}{3}\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{4}s_{q_i}^2s_{q_j}^2s_{q_k}^2-\frac{8}{27}\prod_{i=1}^{4}s_{q_i}^2\Big)+4r^2\Big(\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{4}s_{q_i}^2s_{q_j}^2-\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{4}s_{q_i}^2s_{q_j}^2s_{q_k}^2\\
&+\frac{2}{3}\prod_{i=1}^{4}s_{q_i}^2\Big)+r^3\Big(8\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{4}s_{q_i}^2s_{q_j}^2s_{q_k}^2-\frac{32}{3}\prod_{i=1}^{4}s_{q_i}^2\Big)+8r^4\prod_{i=1}^{4}s_{q_i}^2\geq 0.
\end{aligned}
$$

由于格式 (2) 和格式 (3) 是等价的，因此我们得到如下定理.

定理1 当 $2\leq p\leq 4$ 时，ADI 格式 (2) 是绝对稳定的.

4 外推算法

为了进一步提高格式 (2) 的数值解的精度，可以应用 Richardson 外推法于 ADI 格式 (2). 例如，根据第 2 节的论述，当 $p=3$ 时，我们用 $u_{j_1,j_2,j_3}^n(h,\tau)$ 表示格式 (2) 按空间步长 h，时间步长 τ，计算所得的在第 n 层的 (j_1h,j_2h,j_3h) 处的数值解作为微分方程 (1) 的精确解 $u(j_1,j_2,j_3,n)$ 的近似. 由 (4) 式可得

$$
\begin{aligned}
&u(j_1,j_2,j_3,n)-u_{j_1,j_2,j_3}^n(h,\tau)\\
=&\ \tau^2P(x_1,x_2,x_3,t)+h^4Q(x_1,x_2,x_3,t)+O(\tau^3+\tau^2h^2+\tau h^4+h^6),
\end{aligned}\tag{9}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
P(x_1,x_2,x_3,t)=&\frac{1}{4}\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial^4u}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{\partial^4u}{\partial x_2^2\partial x_3^2}+\frac{\partial^4u}{\partial x_3^2\partial x_1^2}\Big)-\frac{\partial^3u}{\partial t^3}\Big],\\
Q(x_1,x_2,x_3,t)=&\frac{1}{720}\Big[5\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial^4u}{\partial x_1^4}+\frac{\partial^4u}{\partial x_2^4}+\frac{\partial^4u}{\partial x_3^4}+\frac{\partial^4u}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{\partial^4u}{\partial x_2^2\partial x_3^2}+\frac{\partial^4u}{\partial x_3^2\partial x_1^2}\Big)\\
&-2\Big(\frac{\partial^6u}{\partial x_1^6}+\frac{\partial^6u}{\partial x_2^6}+\frac{\partial^6u}{\partial x_3^6}\Big)+5\Big(\frac{\partial^6u}{\partial x_1^4\partial x_2^2}+\frac{\partial^6u}{\partial x_2^4\partial x_3^2}+\frac{\partial^6u}{\partial x_3^4\partial x_1^2}\\
&+\frac{\partial^6u}{\partial x_1^2\partial x_2^4}+\frac{\partial^6u}{\partial x_2^2\partial x_3^4}+\frac{\partial^6u}{\partial x_3^2\partial x_1^4}\Big)\Big].
\end{aligned}
$$

因此有

$$
\begin{aligned}
&u(j_1,j_2,j_3,n)-u_{2j_1,2j_2,2j_3}^{4n}\Big(\frac{h}{2},\frac{\tau}{4}\Big)\\
=&\ \frac{1}{16}\tau^2P(x_1,x_2,x_3,t)+\frac{1}{16}h^4Q(x_1,x_2,x_3,t)+O(\tau^3+\tau^2h^2+\tau h^4+h^6).
\end{aligned}\tag{10}
$$

将 (10) 式乘以 $\frac{16}{15}$，(9) 乘以 $\frac{1}{15}$，然后作差可得

$$u(j_1,j_2,j_3,n)-\frac{1}{15}\Big[16u^{4n}_{2j_1,2j_2,2j_3}\Big(\frac{h}{2},\frac{\tau}{4}\Big)-u^{n}_{j_1,j_2,j_3}(h,\tau)\Big]=O(\tau^3+\tau^2h^2+\tau h^4+h^6).$$

因此，若用

$$\frac{1}{15}\Big[16u^{4n}_{2j_1,2j_2,2j_3}\Big(\frac{h}{2},\frac{\tau}{4}\Big)-u^{n}_{j_1,j_2,j_3}(h,\tau)\Big]$$

作为 $u(j_1,j_2,j_3,n)$ 的近似，同时注意到 $\{O(\tau^2h^2),O(\tau h^2)\}\le\max\{O(\tau^3),O(h^6)\}$，其误差阶可提高至 $O(\tau^3+h^6)$.

5　数值例子

在区域 $D:\{0\le x_1,x_2,x_3\le\pi,t\ge0\}$ 上考虑如下初边值问题

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=\sum\limits_{i=1}^{3}\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2},\\ u(x_1,x_2,x_3,0)=\sin x_1\sin x_2\sin x_3,\\ u(0,x_2,x_3,t)=u(\pi,x_2,x_3,t)=0,\\ u(x_1,0,x_3,t)=u(x_1,\pi,x_3,t)=0,\\ u(x_1,x_2,0,t)=u(x_1,x_2,\pi,t)=0.\end{cases}$$

下面我们给出本文格式 (2) 当 $p=3$ 时的数值解与精确解

$$u(x_1,x_2,x_3,t)=\mathrm{e}^{-3t}\sin x_1\sin x_2\sin x_3$$

和文献 [4] 中 Douglas-Gunn 格式的数值解的比较，同时给出了当 $p=3$ 时格式 (2) 的 Richardson 外推算法的数值解．这里取 $\Delta x_1=\Delta x_2=\Delta x_3=h=\frac{\pi}{16}$，$\tau=rh^2$，$r=\frac{1}{2}$ 和 1．计算到 $n=200$，其数值结果如表 1.

表 1:　各种格式计算结果比较

r	(j_1,j_2,j_3)	精确解	格式 (2)	文献 [4] 格式	外推算法
$\frac{1}{2}$	(1,1,1)	7.041774e-008	7.043219e-008	7.308086e-008	7.041769e-008
$\frac{1}{2}$	(4,4,4)	3.352972e-006	3.353660e-006	3.479778e-006	3.352969e-006
$\frac{1}{2}$	(5,5,5)	5.451476e-006	5.452594e-006	5.657644e-006	5.451472e-006
$\frac{1}{2}$	(7,7,7)	8.947398e-006	8.949234e-006	9.285779e-006	8.947391e-006
1	(1,1,1)	6.678163e-013	6.681959e-013	7.193906e-013	6.678101e-013
1	(4,4,4)	3.179837e-011	3.181644e-011	3.425410e-011	3.179807e-011
1	(5,5,5)	5.169982e-011	5.172921e-011	5.569250e-011	5.169934e-011
1	(7,7,7)	8.485387e-011	8.490212e-011	9.140699e-011	8.485309e-011

从以上结果可以看出，本文格式的数值解与精确解有较好的吻合，它较文献 [4] 的 Douglas-Gunn 格式的解至少精确两位有效数字．本文格式当 $p=3$ 时，外推一次后所得的解的精度又有明显的提高，这表明我们所作的稳定性分析和精度分析是正确的．

致谢： 作者在此衷心感谢曾文平教授对本文所给予的精心指导与热情帮助！

参考文献：

[1] 曾文平. 多维抛物型方程的分支绝对稳定的显式格式[J]. 高等学校计算数学学报，1997, 19(2): 112-122
Zeng W P. A class of explicit difference scheme with branching absolutely stable for solving parabolic partial differential equation in multi-dimension[J]. Numerical Mathematics: A Journal of Chinese Universities, 1997, 19(2): 112-122

[2] 曾文平. 三维热传导方程的一族两层显式格式[J]. 应用数学与力学，2000, 21(9): 966-972
Zeng W P. A class of two-level explicit difference schemes for solving three dimensional heat conduction equation[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2000, 21(9): 966-972

[3] Peaceman D W, Rachford H H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations[J]. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1955, (3): 28-41

[4] 余德浩，汤中华. 微分方程数值解法[M]. 北京：科学出版社，2003
Yu D H, Tang Z H. Numerical Methods of Differential Equations[M]. Beijing: Science Press, 2003

[5] 陆金甫，关治. 偏微分方程数值解法[M]. 北京：清华大学出版社，2005
Lu J F, Guan Z. Numerical Methods of Partial Differential Equations[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005

An ADI Scheme with High Accuracy and Absolute Stability for Solving High Dimensional Parabolic Equations

ZHANG Xing[1], SHAN Shuang-rong[2]

(1- Department of Fundamental Courses, Fujian Vocational College of Bioengineering, Fuzhou 350002;
2- School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou, Fujian 362021)

Abstract: In this paper, an ADI scheme with high accuracy and absolute stability is constructed for solving high dimensional parabolic equations. As p varies from 2 to 4, the scheme is absolutely stable and the truncation error can reach the order of $O(\tau^2 + h^4)$ at the maximum. When p is 3, the Richardson's extrapolation method is successfully applied to the scheme and the approximate solution with accuracy $O(\tau^3+h^6)$ is attained through an extrapolation. The correctness of the proposed scheme is verified by numerical examples.

Keywords: high dimensional parabolic equation; alternating direction implicit scheme; high accuracy; absolutely stable

Received: 18 June 2008. **Accepted:** 16 Dec 2009.

Foundation item: The Projects of Scientific and Technological Foundations of the Overseas Chinese Affairs Office of the State Council (04QZR09).